

# 以賈可比矩陣分佈因子快速求解電力系統虛功最佳調度之問題

<sup>1</sup>黃維澤 <sup>1</sup>莊盟健, <sup>1</sup>羅至暉, <sup>2</sup>陳宣泰, <sup>2</sup>陳天益

<sup>1</sup>彰化師範師範大學 工業教育與技術學系, <sup>2</sup>建國科技大學 電機工程系

彰化市師大路2號

vichuang@cc.ncue.edu.tw

## 摘要

電力系統無效功率之最佳化調度遠較實功困難，此乃因虛功在電力潮流模型中均被視為定值且與母線電壓直接相關，故於虛功發電量之調整過程電壓也必然變動，故與原先電壓控制母線之假設完全不同。因虛功之最佳化調度計算困難，故實際之電力系統控制中心日常仍以實功最佳調度為主，而虛功則由區域負載中心提供，不足之額方由系統發電機供應。雖然大致上均以此方式調度，但仍會出現一些問題，即臨時性或不正常之虛功需求仍需由系統提供，故仍有積極調度之必要。一般虛功之調度均以傳輸損失作為目標函數，此乃因虛功流量對損失仍有相同之影響。本文乃依賈可比分佈因子建立虛功流量與損失模型，並依此模型提出求解之方法，並依此模式推導建立虛功最佳調度之模型。最後，本文所提賈可比分佈因子及虛功最佳調度之方法，以 IEEE 14-Bus 之系統驗證其有效性與實用性，由模擬測試之結果顯示，其不但準確而且快速，極適於線上之即時調度應用。

## 關鍵詞

賈可比分佈因子、虛功流量、虛功目標函數、虛功成本函數。

## 一、前言

電力系統發展至今已逾百年且被廣泛使用，電力的穩定供應為維繫生活品質與科技產業發展之重要因素，因此，提供充足、安全、可靠以及高品質的電力，為產業發展及提升國人生活品質的必要條件。其中，電力潮流之求解方法一直都是電力系統研究者熱門之研究主

題，因其為所有電力系統相關研究之基礎。相關文獻[1-4]探討求解方法，無非為解決收斂及求解速度問題，其中高斯-塞德法使用複數型態潮流方程式，在計算疊代過程中獲得新值，方能達到近似值；而牛頓-拉弗森法則是運用實數型態的電力潮流方程式，疊代過程改變賈可比矩陣，進而達到收斂的效果；快速解耦法對相角改變相當靈敏，使賈可比矩陣分割成二條解耦方程式，相較於所需求解時間大幅縮減。

發電機組每度電之發電成本並不一致，且發電機組分佈在各個不同區域，其所造成之輸電及配電損耗亦不相同，故透過數學之最佳化原理及程式規劃，求得使總和發電機成本為最低，並同時滿足系統之電力平衡之等式限制式以及發電機上、下限與線路流量上限等之不等式限制，此即是電力系統最佳調度之問題[5]。最佳調度的問題必須結合最佳化的理論與電路理論等基礎，因此，首要之任務為深入瞭解電力系統最佳調度問題。為了精確計算最佳調度問題，H. H. Happ[5]乃根據牛頓法電力潮流建立被視為正確解之最佳調度模式。其必須以交流電力潮流法以求解母線電壓大小、相角及線路流量。此種方法雖佳，但因計算冗長、費時且有疊代及收斂之問題，故負載潮流之求解方法仍為關鍵之問題。文獻[6]於 2005 年提出賈可比矩陣分佈因子法(Jacobian Based Distribution Factor, JBDF)求解線路流量問題其所得之效果極佳[6]，本文即依此理論為基礎，推導新的賈可比矩陣分佈因子法最佳調度，以其藉此理論大幅提高計算速度與準確性，進而應用於電力系統即時虛功最佳調度問題。

上述之最佳調度，無論是古典最佳調度或安全限制式最佳調度，均只集中在實功發電量及實功線路流量等調度配置與限制之滿足；實際上仍有虛功發電量及虛功線路流量之調度問題尚未顧及，此即電力系統虛功之最佳調度問題。關於虛功之最佳調度問題已有先進提出許多最佳化數學求解理論及近似逼近之方法[7]，其大部分均以線路損失作為目標函數，在依線性或非線性規劃等疊代逼近方法求取最佳解，但其中大部分仍需執行電力潮流程式，以求得各母線電壓與相角之解，方可求取虛功發電量之最佳調度值，故其求解過程仍極為冗長、費時且有收斂性之問題。

本文為避開求取虛功最佳調度過程所需執行之電力潮流程式，仍依賈可比分佈因子之原理，將搖擺母線外之所有發電機母線及電壓控制母線解構，退化為一般之負載母線，並於基載時執行牛頓-拉弗森電力潮流程式，以建立之賈可比矩陣及其反矩陣式，並依賈可比矩陣分佈因子之原理建立虛功發電量分佈因子，如此便可將各發電母線虛功發電量之變動值，反應於線路之虛功流量上，此即為修正式之賈可比虛功分佈因子。並依線路實功及虛功流量建立輸電損失之模型，以此模型即可對虛功發電量作最佳化之推導與調度計算。依此模型，本文乃提出以傳輸損失為目標函數來求解虛功最佳調度之問題。最後以 Matlab 編撰上述模型之模擬程式，並以 IEEE 14-Bus 測試以上所提方法之準確性與可行性。由模擬測試之結果顯示，本文所提之方法與敏感因子不但快速而且準確，非常適用於線上之即時調度應用。

## 二、電力潮流基態解

本文採用牛頓-拉弗森法計算電力潮流基態解，所得 IEEE -Bus 電力潮流基態解如表 1 所示。

表 1 IEEE 14-Bus 電力潮流基態解

母線編號	電壓大小 $V$ (p.u.)	電壓相角 $\delta$ (deg.)	負載需求		發電量	
			實功率 $P_D$ (MW)	虛功率 $Q_D$ (Mvar)	實功率 $P_G$ (MW)	虛功率 $Q_G$ (Mvar)
1	1.060	0.000	0.000	0.000	160.310	-14.336
2	1.045	-3.249	21.700	12.700	68.700	14.49
3	0.987	-10.262	94.200	19.000	0.000	0.000
4	1.017	-7.713	47.800	-3.900	0.000	0.000
5	1.030	-6.434	7.600	1.600	0.000	0.000
6	1.070	-9.066	11.200	-7.500	39.800	36.826
7	1.002	-9.900	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.002	-9.900	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.995	-11.076	29.500	16.600	0.000	0.000
10	1.000	-10.987	9.000	5.800	0.000	0.000
11	1.030	-10.121	3.500	1.800	0.000	0.000
12	1.051	-10.052	6.100	1.600	0.000	0.000
13	1.041	-10.167	13.500	5.800	0.000	0.000
14	0.996	-11.738	14.900	5.000	0.000	0.000

## 三、虛功賈可比矩陣分佈因子公式推導

假設母線  $p$ 、 $q$  之間線路  $m$  虛功的變化量為：

$$\Delta Q_{pq} = \Delta Q_m \quad (1)$$

上式中  $\Delta Q_m$  皆受各母線注入功率之變動量  $\Delta P_i$  與  $\Delta Q_i$  的影響，故(1)式可以表示如下：

$$\Delta Q_m = \sum_{i=1}^{NB} \frac{\partial Q_m}{\partial P_i} \Delta P_i + \sum_{i=1}^{NB} \frac{\partial Q_m}{\partial Q_i} \Delta Q_i \quad (2)$$

為方便計算，定義  $F_q(m,i)$ 、 $K_q(m,i)$  為虛功 JBDF，代入至(2)式重新整理如下：

$$\Delta Q_m = \sum_{i=1}^{NB} F_q(m,i) \Delta P_i + \sum_{i=1}^{NB} K_q(m,i) \Delta Q_i \quad (3)$$

功率注入量變動後線路  $m$  流量可表示為：

$$Q_m = Q_m^0 + \sum_{i=1}^{NB} F_q(m,i) \Delta P_i + \sum_{i=1}^{NB} K_q(m,i) \Delta Q_i \quad (4)$$

(3)式及(4)式中之  $F_q(m,i)$ 、 $K_q(m,i)$



機母線 1、2、6 等均未列入計算，此乃上述所說明之理由，即母線 1、2、6 之電壓大小為固定且已知，故排除該三項之相關計算。上式牛頓-拉弗森電力潮流聯立方程式之解可表示如下：

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \vdots \\ \Delta\delta_{14} \\ \Delta|V_3| \\ \Delta|V_4| \\ \Delta|V_5| \\ \Delta|V_7| \\ \vdots \\ \Delta|V_{14}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JB_1 & JB_2 \\ & \\ & \\ JB_3 & JB_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \vdots \\ \Delta P_{14} \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta Q_5 \\ \Delta Q_7 \\ \vdots \\ \Delta Q_{14} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中  $JB$  即賈可比矩陣  $J$  之反矩陣，而  $JB_2$  與  $JB_4$  分別表示  $\frac{\partial\delta_i}{\partial Q_j}$  及  $\frac{\partial|V_i|}{\partial Q_j}$  之值。由(13)、(14)式中之缺項可看出。

$$\frac{\partial\delta_i}{\partial Q_j} = 0 \quad j=1,2,6 \quad (15)$$

$$\frac{\partial|V_i|}{\partial Q_j} = 0 \quad j=1,2,6 \quad (16)$$

故發電機母線之虛功分佈因子  $K_q(m,i) = 0 \quad i=1,2,6 \quad m=1,2 \dots NL$  如此便無法將  $Q_{G_i}$  之變動量反應至  $Q_m$  上。

上述問題其原因乃在電壓控制母線之電壓大小為固定，故無法求出相對應之微分項等敏感因子，而衡之實際之情況，若在求解電力潮流及虛功最佳化調度等問題時，其虛功發電量  $Q_{G_i}$  調整時，母線電壓  $|V_i|$  也必須跟隨變動。依此觀念，吾人可將搖擺母線除外之所有電壓控制母線解構，變成一般之負載母線，此時未知數  $M_1$  為：

$$M_1 = 2(NB-1) \quad (17)$$

故 IEEE 14-Bus 之牛頓-拉弗森電力潮流表示式可重寫如下：

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{14} \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ & \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \vdots \\ \Delta\delta_{14} \\ \Delta|V_2| \\ \vdots \\ \Delta|V_{14}| \end{bmatrix} \quad (18)$$

其求解之聯立方程式亦可重新表示如下：

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \vdots \\ \Delta\delta_{14} \\ \Delta|V_2| \\ \vdots \\ \Delta|V_{14}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JB_1 & JB_2 \\ & \\ & \\ JB_3 & JB_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{14} \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{14} \end{bmatrix} \quad (19)$$

如此則  $K_q(m,i)$  所對應之  $i=1,2,6$  均不為零，可如下：

$$K_q(m,i) = \frac{\partial|V_p|}{\partial Q_{G_i}} \frac{\partial Q_m}{\partial|V_p|} + \frac{\partial|V_q|}{\partial Q_{G_i}} \frac{\partial Q_m}{\partial|V_q|} + \frac{\partial\delta_p}{\partial Q_{G_i}} \frac{\partial Q_m}{\partial\delta_p} + \frac{\partial\delta_q}{\partial Q_{G_i}} \frac{\partial Q_m}{\partial\delta_q} \quad (20)$$

上式中之  $\frac{\partial|V_p|}{\partial Q_{G_i}}$ 、 $\frac{\partial|V_q|}{\partial Q_{G_i}}$  可從  $JB_4$  中相對應之元素求得；而  $\frac{\partial\delta_p}{\partial Q_{G_i}}$  與  $\frac{\partial\delta_q}{\partial Q_{G_i}}$  由  $JB_2$  中相對應之元素求得。

## 四、模擬結果分析與探討

### 4.1 以輸電損失為目標函數之最佳調度

本節乃依前述章節所提之虛功流量模型及修正式賈可比虛功分佈因子，推導出虛功最佳調度模型，依此模型撰寫 Matlab 程式，並且以 IEEE 14-Bus 系統進行測試。最後將模擬之結果詳列於後，並探討所推導的虛功經濟調度相關公式之準確性及實用性。

依前述虛功流量( $Q_m$ )可以修正後之 JBDF 描述為虛功發電量( $Q_{G_i}$ )之函數，而

虛功經濟調度過程其虛功發電量( $Q_{G_i}$ )必然變動且引發所有虛功流量( $Q_m$ )及輸電損失( $P_L$ )之變動，故可依本文所提之新型 JBDF 建立虛功最佳調度之模型。本節所提之以輸電損失為最佳化之目標函數，依此建立調度之模型。

如前所述，輸電損失可表示為線路電流平方與線路電阻乘積之總和，而線路電流又可表示為流量之平方和( $P_m^2 + Q_m^2$ )除以電壓之平方，故以  $P_L$  為最佳化目標函數之經濟調度問題可描述如下：

$$\text{Min } J = P_L = \sum_{m=1}^{NL} \left( \frac{1}{|V_{mp}^0|^2} \right) (P_m^2 + Q_m^2) R_m \quad (21)$$

滿足虛功電力供需平衡的等式限制式為：

$$Q_D + Q_L - \left( \sum_{i=1}^{NG} Q_{G_i} + \sum_{i=1}^{NB} Q_{C_i} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{NB} Q_{C_i} = Q_{C_t} \quad (23)$$

其中  $Q_{C_t}$  表所有輸電線及母線電容虛功之總和； $Q_L$  表線路之虛功損失可表示如下：

$$Q_L = \sum_{m=1}^{NL} \left( \frac{1}{|V_{mp}^0|^2} \right) (P_m^2 + Q_m^2) X_m \quad (24)$$

利用拉格朗日乘數法，可將上述限制式最佳化問題修正為一個非限制式之成本函數，如(24)式所示。

$$L = \sum_{m=1}^{NL} (K'_p)^2 (P_m^2 + Q_m^2) R_m + \lambda_q (Q_D + Q_L - \sum_{i=1}^{NG} Q_{G_i} - Q_{C_t}) \quad (25)$$

其中  $K'_p$  乃(21)式中  $V_{mp}$  值知倒數，對(25)式之成本函數之取變數( $Q_G$ 與  $\lambda_q$ )之偏微分，進而獲得最佳解，可推導出以下各式：

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial L}{\partial Q_{G_i}} \\ &= \sum_{m=1}^{NL} (K'_p)^2 \frac{\partial f_i}{\partial P_{G_i}} \left( \begin{aligned} &2P_m \frac{\partial P_m}{\partial Q_{G_i}} \\ &+ 2Q_m \frac{\partial Q_m}{\partial Q_{G_i}} \end{aligned} \right) R_m \\ &\quad + \lambda_q \left( \frac{\partial Q_L}{\partial P_{G_i}} - 1 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \vdots \\ F_n &= \frac{\partial L}{\partial Q_{G_n}} \\ &= \sum_{m=1}^{NL} (K'_p)^2 \frac{\partial f_i}{\partial P_{G_n}} \left( \begin{aligned} &2P_m \frac{\partial P_m}{\partial Q_{G_n}} \\ &+ 2Q_m \frac{\partial Q_m}{\partial Q_{G_n}} \end{aligned} \right) R_m \\ &\quad + \lambda_g \left( \frac{\partial Q_L}{\partial P_{G_n}} - 1 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{\partial L}{\partial \lambda_q} \\ &= Q_D + Q_L - \sum_{i=1}^{NG} Q_{G_i} - Q_{C_t} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $n$  表發電機數目即 NG；而  $\left( \frac{\partial P_m}{\partial Q_{G_i}} \right)$ 、 $\left( \frac{\partial Q_m}{\partial Q_{G_i}} \right)$  之為分項可由修正後之

JBDF 表示如下：

$$\left( \frac{\partial P_m}{\partial Q_{G_i}} \right) = K_p(m, i) \quad i=1 \cdots NG \quad (29)$$

$$\left( \frac{\partial Q_m}{\partial Q_{G_i}} \right) = K_q(m, i) \quad i=1 \cdots NG \quad (30)$$

以牛頓法求解可表示如下：

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_{G_i} \\ \Delta \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \vdots \\ \Delta F_n \\ \Delta F_{n+1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中  $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$ 與  $J_4$ 乃牛頓法之賈可比矩陣可推導如下：

(1).  $J_1$ : 為一(NG×NG)矩陣

(a)  $J_1$  對角線  $i = j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial Q_{G_i}} &= \frac{\partial F_i}{\partial Q_{G_i}} \\ &= \sum_{m=1}^{NL} 2K_{pm}R_m \begin{bmatrix} K_p^2(m,i) \\ +K_{q1}^2(m,i) \end{bmatrix} \\ &+ \lambda_q \left\{ \sum_{m=1}^{NL} 2K_{pm}X_m \begin{bmatrix} K_p^2(m,i) \\ +K_{q1}^2(m,i) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

(b)  $J_1$  非對角線  $i \neq j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial Q_{G_j}} &= \sum_{m=1}^{NL} 2K_{pm}R_m \begin{bmatrix} K_{p1}(m,i)K_{p1}(m,j) \\ +K_{q1}(m,i)K_{q1}(m,j) \end{bmatrix} \\ &+ \lambda_q \left\{ \sum_{m=1}^{NL} 2K_{pm}X_m \begin{bmatrix} K_{p1}(m,i)K_{p1}(m,j) \\ +K_{q1}(m,i)K_{q1}(m,j) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

(2)  $J_2$  : 為一(NG×1)之列矩陣

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_q} &= IQL_i - 1 \\ &= \left\{ \sum_{m=1}^{NL} 2K_{pm}X_m \begin{bmatrix} P_m^0 K_{p1}(m,i) \\ +Q_m^0 K_{q1}(m,i) \end{bmatrix} \right\} - 1 \end{aligned} \quad (34)$$

(3)  $J_3$  : 為一(1×NG)之行矩陣

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{n+1}}{\partial Q_{G_i}} &= \frac{\partial Q_L}{\partial Q_{G_i}} - 1 = IQL_i - 1 \\ &= \left\{ \sum_{m=1}^{NL} 2K_{pm}X_m \begin{bmatrix} P_m^0 K_{p1}(m,i) \\ +Q_m^0 K_{q1}(m,i) \end{bmatrix} \right\} - 1 \end{aligned} \quad (35)$$

(4)  $J_4$  : 為(1×1)之單一值

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \lambda_q} = 0 \quad (36)$$

其求解之流程圖如圖 1 所示。

## 4.2 模擬結果

本節依上述所推導之公式及流程圖，以 Matlab 編寫程式，其以 IEEE 14-Bus 測試系統對所提之方法進行模擬測試，其結果如表 2 所示。由這些數據顯示在虛功之調度計算，每次疊代計算均含引起流量及電壓之變動，故必須將其納入計算，但此係另一課題，本文並未探討。至於執行時間列於表中，由執行時間可看出，本文所提之方法不需執行電力潮流程式，故計算均非常快速。

表 2 模擬結果

方法	$Q_G$	(p.u.)
$Q_{G1}$		0.4630
$Q_{G2}$		0.2238
$Q_{G6}$		0.7075
$\lambda_q$		$5.3687e^{-21}$
線路損失		0.1242
計算時間 (秒)		0.161094

## 五、結論

電力系統實功之最佳調度係控制中心日常調度之核心工作，而傳統均未作虛功之計算與調度，故可能因虛功之需求或流量超乎預期而出現電壓崩潰或線路過載等狀況。是故，近年來有關虛功問題之研究越來越多且越見細膩之趨勢。本文提出一修正式之虛功賈可比分佈因子，使其可作虛功發電量分佈因子之用，由結果顯示其準確度非常高，幾乎等同於電力潮流。並依此分佈因子，提出求解虛功經濟調度之問題。此方法不需執行電力潮流程式，僅以前述之修正式賈可比分佈因子重新計算線路流量即可。以上本文所提之方法均具有快速計算且準確之特性，非常適於電力系統線上之即時調度應用。

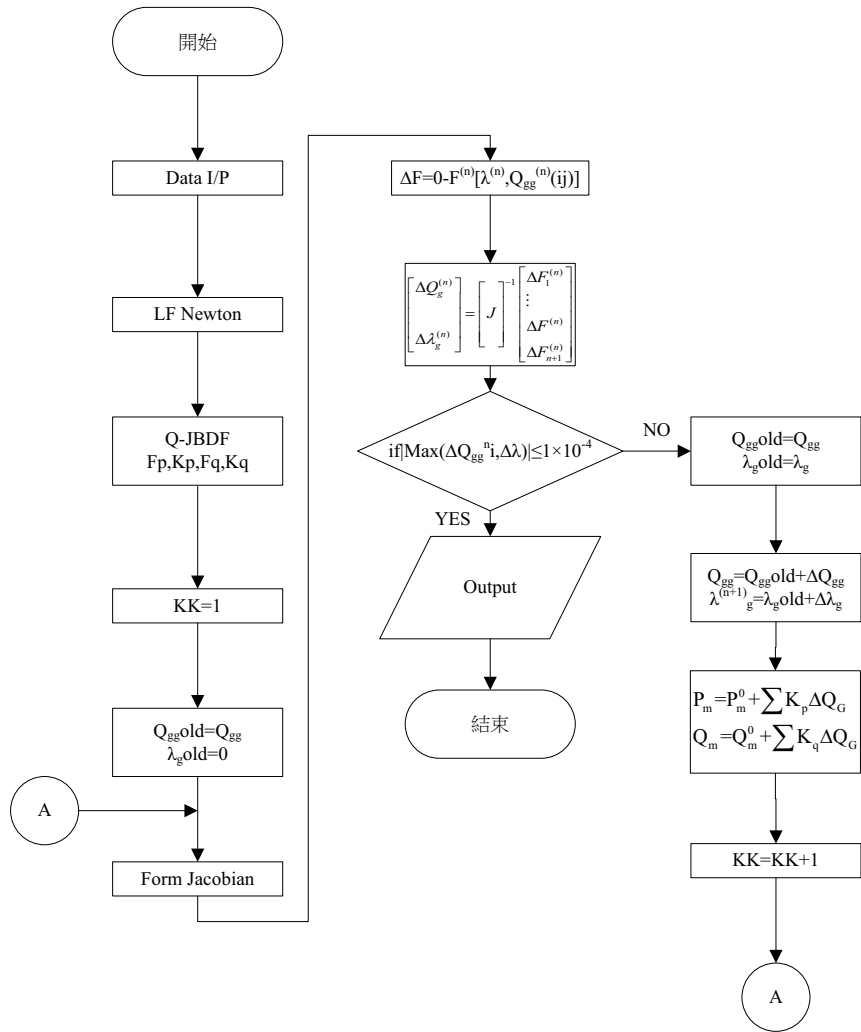


圖 1 求解流程圖

參考文獻

[1] W. F. Tinney and C. E. Hart, "Power Flow Solution by Newton's Method," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-86, 1967, pp. 1449-1460.

[2] B. Stott and O. Alsac, "Fast Decoupled Load Flow," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-93, No. 3, 1974.

[3] Hieu Le Nguyen, "Newton-Raphson Method in Complex form Power Flow Analysis," 1996 IEEE Proceedings of Transmission and Distribution Conference, 1996, pp. 591 – 595.

[4] B. Stott, "Review of Load Flow Calculation Methods," Proceedings of the IEEE, Vol. 62, No. 7, 1974.

[5] H. H. Happ, "Optimal Power Dispatch – A Comprehensive Survey," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-96, No.3, 1977, pp. 841-854.

[6] Huang W T, Yao K C. New network sensitivity-based approach for real-time complex power flow calculation. IET Generation Transmission & Distribution 2012;6(2):109–20.

[7] I. El-Samahy, C. A. Cañizares, K. Bhattacharya and J. Pan, "An Optimal Reactive Power Dispatch Model for Deregulated Electricity Markets," Power Engineering Society General Meeting 2007 IEEE, 24-28 June 2007, pp.1-7.